DUGGA 4, DISKRET MATEMATIK HT 12

Namn: ______________________________

Personnummer: ______________________________

Följande uppgift ska lösas. Uppgiften betygssätts med 0-6 poäng, eventuellt fördelade på flera deluppgifter.För godkänt resultat på ett moment krävs 3 av 6 poäng.
Lösningarna ska vara renskrivna och väl motiverade. En korrekt motivation är nödvändigt för att få full poäng på deluppgifterna.

Grafer och träd

1. En enkel graf $G = (V,E)$ definieras av $V = \{a,b,c,d\}$ och $E = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{c,d\}\}$. Finn antalet vägar av längd 4 i denna graf utan att rita ut grafen. Resonemang baserade på utritade figurer kommer att ge noll poäng. (3p)

   Svar Vi skriver ut grannmatrisen för grafen G och får (med noderna i bokstavsordning)

$$A_G = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Sedan utnyttjar vi satsen som säger att antalet vägar av längd n i grafen mellan två noder v_i och v_j (i uppräkningen för noderna som grannmatrisen ges med avseende på) ges av elementet på position (i,j) i matrispotensen A^n. Vi behöver alltså beräkna matrispotensen A^4:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 7 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 11 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Om vi nu noterar att elementen under diagonalen pekar ut samma vägar som elementen ovanför diagonalen (enkel graf medför oriktad graf vilket medför att vägarna från a till b är samma som vägarna från b till a) får vi nu antalet vägar genom att summera elementen ovanför och på diagonalen i A^4. Så totala antalet blir 54 (7+6+6+4+7+6+4+11+2+3).

2. Motivera att vi inte kan konstruera någon graf G, oavsett hur många noder vi får använda, som har udda antal noder och där varje nod har gradtal 3. (1p)

   Svar Om antalet noder n är udda och varje nod har gradtal 3 kommer totala summan av gradtal i grafen att bli $3n$ vilket är produkten av två udda tal, och alltså udda. Men Handslagssatsen ger att totala summan av gradtal i en graf är $2 \cdot e$ där e är antalet kanter i grafen. Vi kan inte samtidigt ha att totalsumman av gradtalen samtidigt är udda och jämn. Alltså kan vi inte konstruera en graf sådan som den beskrivs i uppgiften.

3. Följande viktade enkla graf $G = (V,E)$ är given, där kanterna i E beskrivs som (2p)

$$(\{v_i, v_j\}, w)$$

där $\{v_i, v_j\}$ är noderna som kanten går mellan och w är kantens vikt:

$$V = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$$

$$E = \{(\{a,b\},2),(\{a,d\},4),(\{a,e\},3),(\{b,c\},4),(\{b,e\},5),(\{c,f\},3),(\{d,e\},3)$$
$$(\{d,g\},1),(\{e,f\},5),(\{e,g\},5),(\{e,h\},2),(\{f,i\},3),(\{g,h\},4),(\{h,i\},1)\}.$$

Finn ett minimalt uppspännande träd till denna graf. Ni får använda vilken algoritm som helst av de två som presenterats i kursen (Prim eller Kruskal) men ni ska i räkningarna konsekvent hålla er till den algoritm ni från början valde.

Svar Prim kräver att varje delgraf konstruerat i algoritmen är ett delträd, dvs sammanhängande och cykelfritt. Kruskal kräver bara att det är cykelfritt.

Jag redovsar gången med Kruskals algoritm: eftersom antalet noder är 9, vet vi att algoritmen kommer att ha 8 steg i den här tillämpningen.

Steg	*kant*	*vikt*
1	{d, g}	1
2	{h, i}	1
3	{a, b}	2
4	{e, h}	2
5	{a, e}	3
6	{c, f}	3
7	{d, e}	3
8	{f, i}	3
	Summa	18

Minimalt uppspännande trädet blir alltså: $T = (V,E)$ med

$$V = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$$

$$E = \{(\{a,b\},2),(\{a,e\},3),(\{c,f\},3),(\{d,e\},3)(\{d,g\},1),(\{e,h\},2),(\{f,i\},3),(\{h,i\},1)\}.$$