DUGGA 3, DISKRET MATEMATIK HT 12

Namn: ____

Personnummer: ____

Följande uppgift ska lösas. Uppgiften betygssätts med 0-6 poäng, eventuellt fördelade på flera deluppgifter.För godkänt resultat på ett moment krävs 3 av 6 poäng.
Lösningarna ska vara renskrivna och väl motiverade. En korrekt motivation är nödvändigt för att få poäng på deluppgift 1 och 2.

Rekurrensrelationer, Relationer

1. Finn den karaktäristiska ekvationen, och enbart den karaktäristiska ekvationen, för rekurrensrelationen $a_n = a_{n-1} - 5a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$. (1p)

   Svar Vi noterar först att karaktäristiska ekvationen bara beror på rekurrensrelationen själv, inte på begynnelsevillkoren. Genom att sätta $a_n = r^n$ får vi ekvationen $r^n = r^{n-1} - 5r^{n-2} \Leftrightarrow r^n - 2(r^2 - r + 5) = 0$. Tar vi bort termen r^{n-2} som bara ger lösningen 0, har vi kvar den karaktäristiska ekvationen $r^2 - r + 5 = 0$.

2. Bestäm antalet element i en mängd U för vilken fyra stycken delmängder A, B, C och D uppfyller följande villkor: unionen av dem är hela U, $|A| = 6$, $|B| = 14$, $|C| = 11$, $|D| = 13$, $|A \bigcap B| = 3$, $|A \bigcap C| = 2 = |A \bigcap D|$, $|B \bigcap C| = 9 = |B \bigcap D|$, $|C \bigcap D| = 10$, $|A \bigcap B \bigcap C| = 2 = |A \bigcap B \bigcap D| = |A \bigcap C \bigcap D|$, $|B \bigcap C \bigcap D| = 9$ och , $|A \bigcap B \bigcap C \bigcap D| = 2$, eller motivera att situationen är omöjlig. (2p)

   Svar Generella inklusion-exklusionprincipen ger att

   $$|U| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \bigcap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap C| - |C \cap D| +$$

   $$+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|.$$

   Stoppar vi in värdena från uppgiften får vi nu

   $$|U| = 6 + 11 + 14 + 13 - 3 - 2 - 2 - 9 - 9 - 10 + 2 + 2 + 2 + 2 + 9 - 2 = 22.$$

3. Relationen R på $A = \{a, b, c, d\}$ ges av $R = \{(a, d), (c, b), (d, b)\}$.

   Bestäm en matrisrepresentation för det transitiva höljet för R. Full poäng ges bara om man använder och väl redovisar användingen av en algoritm som ges av en sats presenterad i boken (och på föreläsning). (3p)

   Svar Matrisrepresentationen för relationen är

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Result i kursen ger att matrisrepresentationen för det transitiva höljet ges av

$$B = A \bigvee A^{[2]} \bigvee A^{[3]} \bigvee A^{[4]}$$

där potenserna är boolska matrispotenser. Dessa är i det här fallet enkla att beräkna

$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{[3]} = A^{[2]} \odot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

och

$$A^{[4]} = A^{[3]} \odot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alltså blir matrisrepresentationen för det transitiva höljet

$$B = A \vee A^{[2]} \vee A^{[3]} \vee A^{[4]} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bigvee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bigvee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bigvee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lycka till! från Jan-Olav och Mikael