DUGGA 2, DISKRET MATEMATIK HT 12

Namn: ____

Personnummer: ____

Följande uppgift ska lösas. Uppgiften betygssätts med 0-6 poäng, eventuellt fördelade på flera deluppgifter.För godkänt resultat på ett moment krävs 3 av 6 poäng.
Lösningarna ska vara renskrivna och väl motiverade.

Induktion och Rekursion

1. Vi betraktar följande rekursivt definierade funktion:

$$a_{n+1} = a_n^3 - a_{n-1},\ a_0 = 0, a_1 = 2.$$

   Visa med hjälp av matematisk induktion att a_n är en växande följd, dvs $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq 0$. (3p)

   Svar Vi behöver använda starka induktionsprincipen.

   Räknar vi ut de första värderna förutom startvärdena ser vi att $a_2 = 2^3 - 0 = 8$, $a_3 = 8^3 - 2 = 510$, så funktionens värden verkar växa rätt snabbt.

   Startsteget: är klart från startvärdena, $a_1 = 2 > 0 = a_0$.

   Induktionssteget: Antta att funktionsvärdena är strikt växande upp till heltal n, dvs $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_1 = 2$ vilket är strikt större än $a_0 = 0$. Notera också att detta medför att alla värden a_n, $n \geq 1$ är strikt större än 2 (vi kommer att utnyttja detta). Vi kan också anta $n \geq 1$ eftersom fallet $n = 0$ är startsteget.

   Vi behöver nu visa att $a_{n+1} > a_n$.

   $a_{n+1} = a_n^3 - a_{n-1} > a_n^3 - a_n$ (eftersom vi i det sista uttrycket drar ifrån något som är större än det som tidigare drogs ifrån eftersom $a_n > a_{n-1}$ enligt induktionsantagandet) $= a_n(a_n^2 - 1) > a_n(2^2 - 1) = 3a_n > a_n$ eftersom $a_n > 2 > 0$ (enligt induktionsantagandet och resonemanget ovan).

   Därmed är induktionssteget visat.

   Matematiska induktionsprincipen (starka versionen) ger nu att påståendet gäller fär all $n \geq 0$, dvs funktionen är strikt växande.

2. Mängden S definieras rekursivt genom:

$$0 \in S, 1 \in S$$

   och villkoret

$$a \in S, b \in S \Rightarrow a + 2b^2 \in S.$$

   Innehäller S alla ickenegativa heltal? (3p)

   Om svaret är ja, visa det. Om svaret är nej, motivera det genom att ge ett exempel på ett ickenegativt heltal som inte ligger i S, med fullständig motivering för att talet inte är i S.

Svar Efter lite räknande på de första heltalen ser vi att det verkar gå, eftersom $2 = 0 + 2 \cdot 1^2$, $3 = 1 + 2 \cdot 1^2$, $4 = 2 + 2 \cdot 1^2$ och $5 = 3 + 2 \cdot 1^2$. Vi ser också ett mönster, genom att välja $b = 1$ i formeln i definitionen ligger ett tal n i S om $n - 1 \in S$.

Så ett mycket enkelt induktionsresonemang ger att alla ickenegativa heltal ligger i S:

Startsteg: $0 \in S, 1 \in S$

Induktionssteg: Vi antar $k \in S, 0 \leq k \leq n$. Vi vill nu visa att $n + 1 \in S$.

Men vi kan skriva $n + 1 = n - 1 + 2 = (n - 1) + 2 \cdot 1^2$, och enligt ind.antagandet ligger alla ickenegativa $k \leq n$ i S; speciellt har vi att $n - 1 \in S$ och $1 \in S$. Därmed måste enligt den rekursiva definitionen även $n + 1 = n - 1 + 2 = (n - 1) + 2 \cdot 1^2$ ligga i S.

Matematiska induktionsprincipen ger då att alla ickenegativa heltal ligger i S.